清华大学考试试题专用纸

考试课程: 代数 1H 期末考试 A 卷

姓名: ____________ 班级: ____________ 学号: ____________

- 考试时间: 2022 年 1 月 7 日 (星期六) 8:00am – 12:00noon.
- 本试卷共 2 页, 12 道大题, 总分为 130 分.
- 考生默认遵守考试纪律, 不遵守者后果自负.
- 所有的解答请写出必要的细节, 推理依据和推理过程. 注意引用定理或结论时, 应尽量引用其原始版本而非不常见的变种版本. 若题目要求证明定理或结论本身, 不能直接叙述其名字而不加证明.

以下题目中 $\mathbf{R}$ 指实数域, $\mathbf{C}$ 指复数域, $\mathbf{Z}$ 指整数全体。对素数 p, 记 $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 为 p 个元素组成的域.

题 1 (10 分). 交换群 $(G,+)$ 的单位元记作 0. 假设 G 可由三个元素 x,y,z 生成, 且满足

$$10x+4y+6z=0, 4x+4y+4z=0, 2x+8y+8z=0,$$

其中 nx 表示 n 个 x 相加得到的元素。请求出所有可能的群 G 的同构类。

题 2 (10 分). 假设复数 α 满足方程 $x^5-14x^2+6=0$. 证明

1. $\mathbf{Z}[\alpha]=\{f(\alpha)\mid f(x)\in\mathbf{Z}[x]\}$ 在加法下做为交换群是有限生成的.
2. $\mathbf{Z}[\alpha^{-1}]=\{f(\alpha^{-1})\mid f(x)\in\mathbf{Z}[x]\}$ 在加法下做为交换群不是有限生成的. (可以使用作业已经证明的结论，请陈述你使用的结论是什么)

题 3 (10 分). 求实数域 $\mathbf{R}$ 的所有环自同构并证明你的结论。

题 4 (10 分). 请求出以下含幺交换环 R 中的所有乘法可逆元。

1. $R=\mathbf{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}]$, 并且将乘法可逆元在乘法下组成的群写作循环群的直积。
2. $R=\mathbf{C}[x,y]/(y^2-x^3)$.

题 5 (10 分). 假设在有限维复线性空间 V 上有一个**正定**的 *Hermitian form*, 并且有一个自伴算子 *(self-adjoint, or hermitian operator)* Q, 记 I 是恒等算子.

1. 请证明 $I-\sqrt{-1}Q$ 可逆，且 $U=(I+\sqrt{-1}Q)(I-\sqrt{-1}Q)^{-1}$ 是酉算子 *(Unitary operator)*。

2. 是否对任何的酉算子 (*Unitary operator*) U，均存在自伴算子 (*self-adjoint operator*) Q，使得

$$U=(I+\sqrt{-1}Q)(I-\sqrt{-1}Q)^{-1}\ ?$$

如果均存在，请证明，如果不存在请举出反例。

题 6 (10 分). 请判定以下的环 R 是否是唯一分解整环，并给出你的理由。

1. $R=\mathbf{Z}[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}]$

2. $R=\mathbf{Z}[\sqrt{-21}]$

题 7 (10 分). 1. 请求出交换群 $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2\times(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$ 的自同构群的阶数。

2. 假设 G 是有限交换群，证明 G 的自同构群是交换群当且仅当 G 是循环群。

题 8 (10 分). 假设 R 是含幺交换环，请证明以下两条陈述等价

1. R 的有限生成自由模 R^n 的子模 M 均同构于某个有限生成的自由模 R^m, 这里 n,m 均指非负整数。

2. R 是主理想整环。

题 9 (10 分). 假设 K 是域，且其中 $1+1\neq 0$. 证明如下两条陈述等价

1. K 的 *Witt* 群 $W(K)$ 同构于 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$。

2. K 中所有元素均可写作其中某个元素的平方。

题 10 (10 分). 设 V 是 $\mathbf{C}$ 上的线性空间，且有线性变换 $T\colon V\to V$. 假设 T 可对角化且 W 是 T-不变子空间。证明存在 V 的 T-不变子空间 U 使得 $U\oplus W=V$.

题 11 (15 分). 对以下的域 $\mathbf{F}$, 求出四维线性空间 $\mathbf{F}^4$ 上的对称双线性型的同构类一共有多少类，并对每一类举出一个代表元。

1. $\mathbf{F}=\mathbf{C}$ 复数域

2. $\mathbf{F}=\mathbf{R}$ 实数域

3. $\mathbf{F}=\mathbf{F}_7$ 七个元素的域

题 12 (15 分). 假设 p 是素数，考虑群 $G=\mathrm{GL}(3,\mathbf{F}_p)$ 和 $H=\mathrm{SL}(3,\mathbf{F}_p)$.

1. 请分别求出 G 和 H 的阶数。

2. 请分别求出 G 和 H 的 *Sylow* p-子群的个数。

3. 请求出 G 的共轭类个数。

[附加题，8 分，如果前面题目没有满分则按不足部分计入总评分数] 对上一题中的群 $G=\mathrm{GL}(3,\mathbf{F}_p)$，请求出 G 的每个共轭类的元素个数。